第 1 問

被積分関数は

$$\begin{aligned}\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)&=x^2+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x^2}{1+x^2}\right)\\&=x^2+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(2-\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=x^2+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+x^2\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

となるので

$$I_1=\int_0^1 x^2dx\ \ ,\ \ I_2=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx\ \ ,\ \ I_3=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx\ \ ,\ \ I_4=\int_0^1\frac{x}{1+x^2\sqrt{1+x^2}}dx$$

として

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx=I_1+I_2+I_3-I_4$$

が成立する. 以下 $I_1\sim I_4$ を求める. $I_1=\dfrac{1}{3}$ であり, I_2 に関しては $x=\tan\theta$ の置換積分を実行して

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cos^4\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\\&=\frac{\pi-2}{8}\end{aligned}$$

I_3,I_4 に関しては $1+x^2=u$ の置換積分により

$$I_3=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}du=\left[2\sqrt{u}\right]_{u=1}^{u=2}=2\sqrt{2}-2$$

$$2I_4=\int_1^2\frac{1}{u\sqrt{u}}du=\left[\frac{-2}{\sqrt{u}}\right]_{u=1}^{u=2}=2-\sqrt{2}\quad\therefore\ \ I_4=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

以上より

$$\underline{\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}+\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

第 2 問

AQ$=x(0\leqq x\leqq 1)$ とおく. $\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}$ なので $x>0$ で AP$=\dfrac{2}{3x}$.

さらに P は線分 AB 上なので $\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$. また DR$=y(0\leqq y\leqq 1)$ とおくと, $\triangle\mathrm{QDR}=$ (四角形 ABRD)$-\triangle\mathrm{ABQ}-\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{2}{3x}\right)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{2}{3}$ である. また $\triangle\mathrm{QDR}=\dfrac{1}{2}(1-x)y=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}xy$ であるので

$$\frac{1}{2}y+\frac{1}{3x}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}xy\Longleftrightarrow y=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-2\right)$$

$u=\dfrac{1}{x}$ の変数変換を施す. $1\leqq u\leqq\dfrac{3}{2}$ でありこのとき $y=\dfrac{2}{3}u(2-u)$ の値域は $\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}$ となるので $0\leqq y\leqq 1$ の条件は満たされる. $\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}u^2(2-u)=f(u)$ として, $1\leqq u\leqq\dfrac{3}{2}$ における $f(u)$ の値域を求める.

$$f'(u)=\frac{2}{3}u(4-3u)$$

を踏まえて $f(u)$ の増減表は下図のようになる.

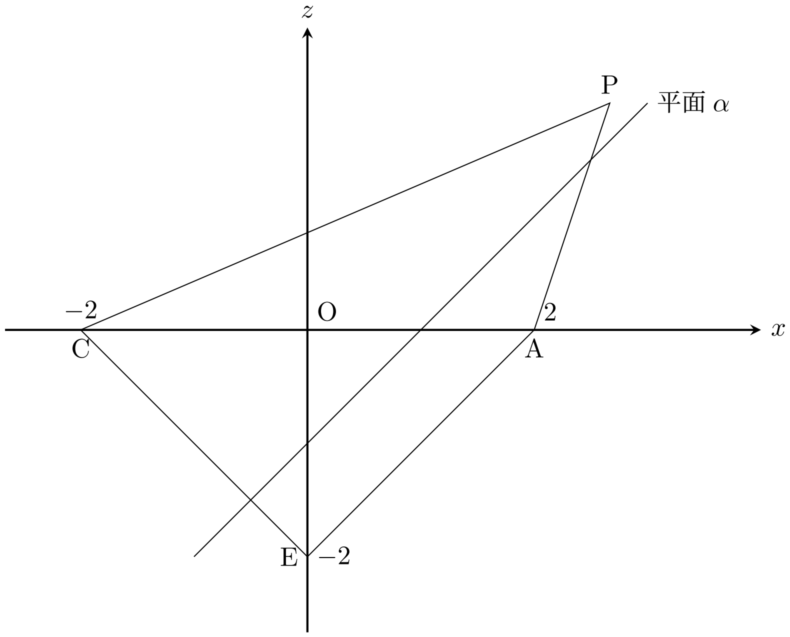
t	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

故に, 最大値$\underline{\frac{64}{81}}$最小値$\underline{\frac{2}{3}}$ともとまる.

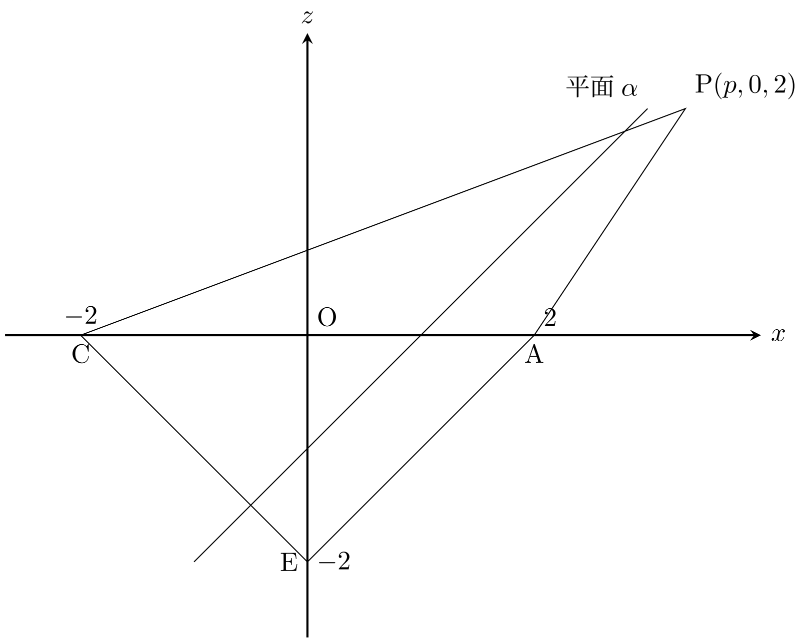
第 3 問

(1) 平面 α は, 線分 MN の中点 $(1,0,0)$ を通り $\overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ で張られる平面である. ここで $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(-2,0,-2), \overrightarrow{\mathrm{MN}}=(0,-2,0)$ であることに注意する. それ故平面 $y=0$ での断面は点 $(1,0)$ を通り, 方向ベクトルを $(1,1)$ とする直線となり, 図は以下のようになる.

(i)$2<p<3$ の時



(ii)$3 \leqq p<4$ の時



(2) 必要十分条件は, 八面体 PABCDE と平面 α が異なる 8 点で交わることである. 考えている図形の平面 $y=0$ に対する対称性も考慮すると平面 $y=0$ での共有点の個数と八面体 PABCDE と平面 α の共有点は線分

OE, OP,OC 上で 1 : 2, 線分 PC,AE,AP 上で 1 : 1 に対応するので (1) の図も参照して求める答えは

$$\underline{3 < p < 4}$$

となる.

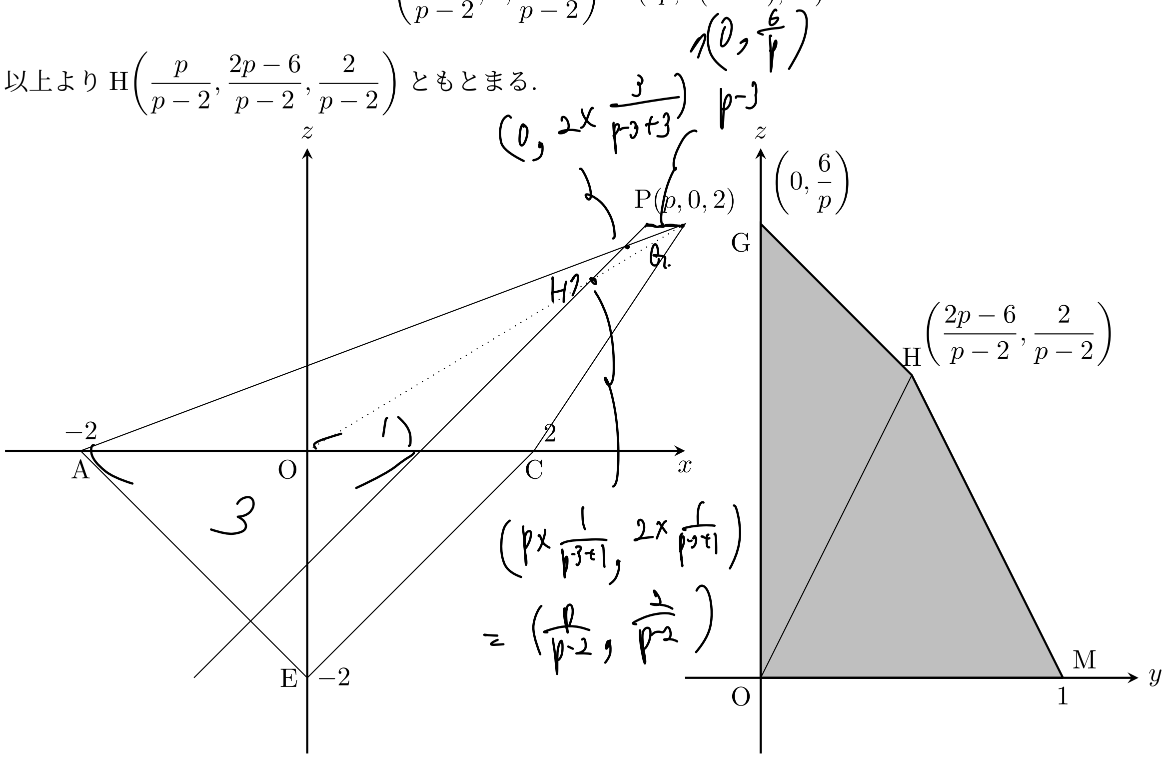
(3) 見取り図は以下のようになる. ここで線分 AP と平面 α の共有点を G, 線分 OP と平面 α の共有点を H$'$, 線分 BP と平面 α の共有点を H と定めた.H$'$ は点 H を平面 $y = 0$ 上に投射した点であるので点 H の x, z 座標は点 H$'$ のそれと一致する. 点 H の y 座標を h とすると, H は直線 BP 上なのである実数 s を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

すなわち,

$$\left(\frac{p}{p-2}, h, \frac{2}{p-2}\right) = (sp, 2(1-s), 2s)$$

以上より H$\left(\frac{p}{p-2}, \frac{2p-6}{p-2}, \frac{2}{p-2}\right)$ ともとまる.



以上より求める面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{p-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{p} \cdot \frac{2p-6}{p-2} = \underline{\frac{7p-18}{p-2}}$$

第 4 問

(1)

$$5n^2 + 9 = 5(n^2 + 1) + 4$$

より Euclid の互除法から d_n は 4 と $n^2 + 1$ の最大公約数に等しい.n^2 を 4 で割った余りは n が奇数である時 1, 偶数の時 0 なので

$$\underline{d_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ は偶数}) \\ 2 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}}$$

(2)$(n^2 + 1)(5n^2 + 9)$ が整数 m の二乗になると仮定する.m を素因数分解して $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ と表示する. そうすると, $n^2 + 1, 5n^2 + 9$ の素因数の候補は $p_i (1 \leqq i \leqq k)$ となる. ここで, $n^2 + 1$ と $5n^2 + 9$ が共通素因数 p_i を持つと仮定する.(1) よりこれらの最大公約数が d_n なので, $p_i \leqq d_n$ である.p_i は素数であり, (1) の結果も参照して n が偶数である時, このような p_i は存在しない.n が奇数である時は, このような素数 p_i の候補は 2 のみであり逆に n が奇数である時 $n^2 + 1, 5n^2 + 9$ はいずれも奇数であるので, 共通素因数に 2 を持ち, $p_i = 2$ なる i が存在する. またさらに n が奇数である時, $i \neq j$ なる i, j が存在して $p_i = p_j = 2$ と仮定すると 4 が公

約数となり矛盾する. それ故に, 以下が従う.
(i)n が偶数の時

$$n^2+1=l^2(l\text{ は奇数}) \iff (l-n)(l+n)=1$$

$n,l\in\mathbb{N}$ であるが故に, $n+l\geqq 2$ となり, 上式をみたす自然数 n,l は存在しないため n が偶数の時には $(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とはなり得ない.
(ii)n が奇数の時

$$\begin{cases} n^2+1=2l^2 & (l\text{ は奇数}) \\ 5n^2+9=2m^2 & (m\text{ は奇数}) \end{cases} \quad \therefore \quad 2n^2=(3l-m)(3l+m)$$

l,m は奇数であるので, $3l-m, 3l+m$ はいずれも偶数である. それ故, 右辺は 4 の倍数となるが n 奇数より左辺は 4 の倍数ではない. 故に n が奇数の時には $(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とはなり得ない.

第 5 問

(1)$f(x)=x^{2n-1}-\cos x$ とおく. ここで任意の実数 x に対して, $|\cos x|\leqq 1$ なので, $f(x)=0$ が解を持つならばそれは $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲である. それ故に以下では $-1\leqq x\leqq 1$ での $f(x)$ の振る舞いを調べる. さらにここで, $\pi>2$ から $-\dfrac{\pi}{2}<-1\leqq x\leqq 1<\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意する.$2n-1$ は奇数なので, $-1\leqq x\leqq 0$ で x^{2n-1} であり, $\cos x>0$ も踏まえてこの範囲において $f(x)<0$ である. それ故に解が存在するならばそれは $0<x\leqq 1$ の範囲にあり, この範囲での $f(x)$ の振る舞いを考えると, $f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}+\sin x>0$ であるがため $f(x)$ はこの範囲で狭義単調増加であり $f(0)=-1<0, f(1)=1-\cos 1>0$ であるので f が連続であることも合わせると $f(x)=0$ は $0<x<1$ に唯一の実数解 a_n を持つ.
(2)$0<x<1$ における $\cos x$ の単調減少性と (1) において考察された解の存在範囲から $0<a_n<1$ なので $\cos a_n>\cos 1$
(3)$f(a_n)=0$ なので

$$a_n^{2n-1}=\cos a_n \iff a_n=(\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} \tag{$*$}$$

(2) も合わせて $\cos 1<\cos a_n<1$ なので

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}<(\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}}<1$$

$n\to\infty$ の極限を考えることにより, 挟み撃ちの原理から $\underline{a=\lim_{n\to\infty}a_n=1}$
　$(*)$ を変形して

$$a_n^n=\sqrt{a_n\cos a_n}$$

であり, $n\to\infty$ の極限を考えることにより $\underline{b=\lim_{n\to\infty}a_n^n=\sqrt{\cos 1}}$
　以上より,

$$\frac{a_n^n-b}{a_n-a}=\frac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}=\frac{g(a_n)-g(1)}{a_n-1}\quad \text{ただしここで関数 } g(x) \text{ を } g(x)=\sqrt{x\cos x}\text{で定めた.}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ なので, $n\to\infty$ で右辺は $g'(1)$ に収束し,

$$\underline{c=g'(1)=\left.\frac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}\right|_{x=1}=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}}$$

第 6 問

(1) 与えられた 4 次方程式は実数係数の方程式であるがため, z が解ならばその共役複素数 $\bar{z}$ も解となる $\cdots(*)$.
それ故に, 方程式の解としては以下の 3 通りが考えられる
(i)$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ である時. これは条件 3 を満たさない.
(ii)$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ いずれも実数でないとき.
$(*)$ と α,β と γ,δ の対称性により, さらに次の 2 通りの場合が考えられる.

(ア)α,β が互いに共役で γ,δ も互いに共役な複素数である時.
$\alpha\beta,\gamma\delta\in\mathbb{R}$ となるので条件 3 に反する.
(イ)$\alpha,\gamma,\beta,\delta$ がそれぞれ互いに共役な複素数である時

$$\overline{\gamma\delta}=\overline{\gamma}\overline{\delta}=\alpha\beta$$

なので, $\alpha\beta+\gamma\delta=\overline{\gamma\delta}+\gamma\delta\in\mathbb{R}$ となりこれまた条件 3 に反する. 以上より, 解として考えられるのは <u>(iii))$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ のうち二つが異なる実数でもう二つが互いに共役な複素数である場合</u>である.
(2)(iii) でさらに, α,β が異なる実数であると仮定する. この時 γ,δ は互いに共役なので, 条件 3 が満たされない. それ故に, 対称性も考慮して α,γ を異なる実数, β,δ を互いに異なる共役な複素数として良い. ここで $\beta=x+yi,\delta=x-yi\ \ (x,y\in\mathbb{R},y\neq 0)$ とおく. こうすると

$$\alpha\beta+\beta\delta=(\alpha+\gamma)x+y(\alpha-\gamma)i$$

であり, 条件 3 から $\alpha=-\gamma\neq 0$ が従う. このもとで解と係数の関係から,

$$2=\alpha+\beta+\gamma+\delta=2x\quad\therefore\quad x=1$$
$$0=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\beta\delta+\alpha\gamma=\beta\delta+\alpha\gamma=1+y^2-\alpha^2$$
$$2a=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-2\alpha^2$$
$$b=\alpha\beta\gamma\delta=-(1+y^2)\alpha^2$$

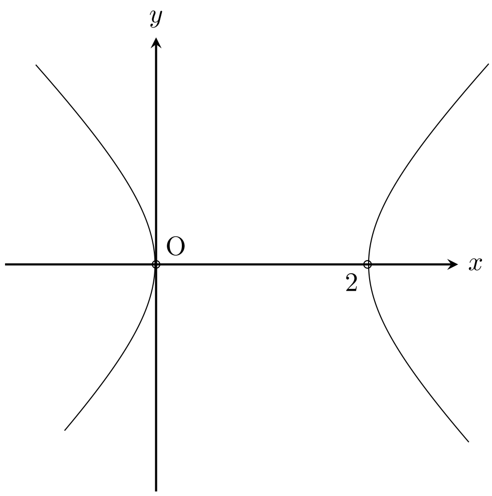
以上より, $\underline{b=-\alpha^4=-a^2}$
(3)$\alpha+\beta=\alpha+1+yi$ なので,2 変数 α,y が

$$\alpha,y\neq 0$$
$$\alpha^2=1+y^2$$

を満たしつつ動くときの xy 平面上での点 $(1+\alpha,y)$ の軌跡を求めることに問題は帰着する.α,y の存在条件から軌跡は

$$(y^2=(x-1)^2-1\Longleftrightarrow(x-1)^2-y^2=1)\text{ かつ }x-1\neq 0\text{ かつ }y\neq 0$$

すなわち, 軌跡は双曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ の点 $(0,0),(2,0)$ を除いた部分となる. 図示すると, 以下のようになる.



ただし白丸の点は除く