第 1 問

(1)$a<0$ と仮定する. この時, 十分大きい $x>p$ に対して $ax^2+bx+c<0$ が満たされる. 実際には例えば $x=\max\left\{p+1, \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+1\right\}$ がこの条件を満たす.

ここで仮定より,$x>p$ を満たす任意の x に対して, $ax^2+bx+c>0$ が満たされることと矛盾する. それ故に, $a\geqq 0$ が従う. a,b,c の対称性から, 同様にして a,b,c が全て 0 以上であることが示された.

(2)$a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ であると仮定する. この時十分小さい $x\leqq p$ に対して与えられた三つの不等式が成立する. 例えば, $x=\min\left\{p, \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \dfrac{-c+\sqrt{c^2-4ab}}{2b}, \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4bc}}{2c}\right\}$ がこれを満たす. これは与えられた 3 つの不等式を同時に満たす実数 x の集合が $x\geqq p$ となることと矛盾する. それ故に, (1) と合わせて a,b,c のうちいずれかは 0 であることが証明された.

(3)(2) と a,b,c の対称性から $a=0$ として良い. この時与えられた不等式は以下のように書き変わる.

$$bx+c>0 \tag{α}$$
$$bx^2+cx>0 \tag{β}$$
$$cx^2+b>0 \tag{γ}$$

$b=c=0$ の時, 与えられた連立不等式を成立させる実数 x の集合は空集合となり条件に反するため, b,c のうちいずれかは 0 でない. 故に, 式 (γ) は任意の実数 x に対して成立する. 従って, 以下では式 (α) かつ (β) の成立条件について議論する.

$b=0$ とすると前述の理由から $c>0$ が従う.$c=0$ とすると同様に $b>0$ が成立し, これらの場合

$$(\alpha)\text{ かつ }(\beta)\iff x>0$$

となり $p=0$ が従う.

$b>0, c>0$ の時についても同様にして $\dfrac{c}{b}>0$ に注意して,

$$(\alpha)\text{ かつ }(\beta)\iff x>-\frac{c}{b}\text{かつ }(x<-\frac{c}{b}\text{または }0<x)\iff x>0$$

となり, $p=0$ が従う.

第 2 問

以下の場合わけを行う.

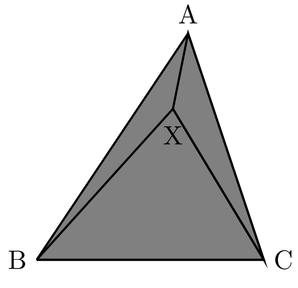
(i) 点 X が △ABC の内部にある時. 下図よりわかる通り,

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABC}=1$$

が成立し, 条件

$$2\leqq\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3 \tag{$*$}$$

が満たされない.

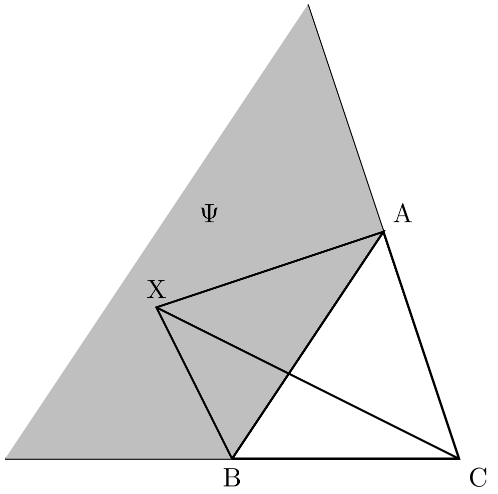


(ii) 点 X が図の領域 Ψ にある時.
図より以下の関係式が成立する

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{ABX}+1$$

故に条件 $(*)$ は以下と同値

$$\frac{1}{2}\leqq\triangle\mathrm{ABX}\leqq 1$$

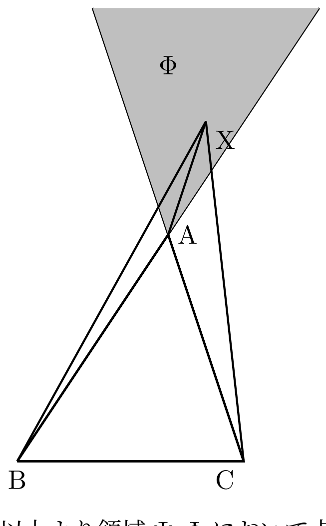


(iii) 点 X が図の領域 Φ にある時.
図より以下の関係式が成立する

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{BCX}-\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{BCX}-1$$

故に条件 $(*)$ は以下と同値

$$\frac{3}{2}\leqq\triangle\mathrm{BCX}\leqq 2$$



以上より領域 Ψ,Φ において点 X の存在しうる領域 ψ,ϕ は下図の灰色部分となる.
　ただしここで, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{IH}}=2\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である.
さてここで, $\triangle\mathrm{ABC}=1$ であることと, 前述の平行条件を踏まえると, 領域 ψ,ϕ の面積をそれぞれ,S_ψ,S_ϕ として, これらはそれぞれ相似比と面積の関係より

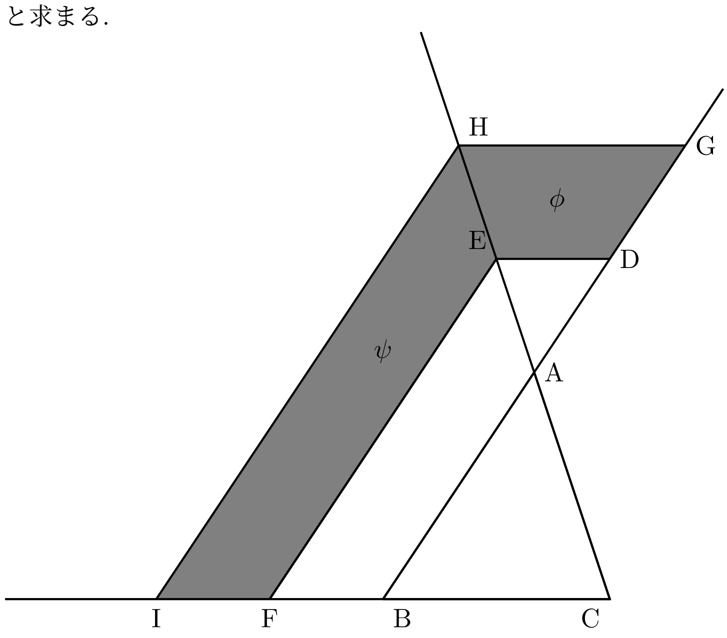
$$\frac{S_\psi}{\triangle\mathrm{ABC}}=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\quad\therefore\quad S_\psi=\frac{7}{4}$$

$$\frac{S_\phi}{\triangle\mathrm{ABC}}=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\quad\therefore\quad S_\phi=\frac{3}{4}$$

とわかり求める面積は対称性より,

$$3S_\psi+3S_\phi=\underline{\frac{15}{2}}$$

と求まる.



第 3 問

(1)

$$\frac{y(t)}{x(t)} = 3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

であり, $\dfrac{2}{1+t}$ は $t > -1$ において単調減少なので, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は $-1 < t \leqq 1$ において単調に減少する.

(2) つねに $f(t) > 0$ 故に, $f(t)$ の増減は関数 $g(t) = f(t)^2$ の増減と一致する.

$$g(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = 2(1+t)^2(5-4t)$$

であり

$$g'(t) = 12(1+t)(1-2t)$$

なので, $f(t)$ の増減表は下図のようになる.

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

$$t = \frac{1}{2}\text{で最大値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

(3)(1), (2) の考察より領域 D の面積 S は, 半径 $\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$ 中心角 $\dfrac{\pi}{2}$ の円と C と x 軸で囲まれる領域の面積に等しい.$x(t)$ が単調増加関数である故に, 面積 S は次のようになる.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{x(-1)}^{x(1)} y\,dx \\
&= \frac{27\pi}{8} + \int_{t=-1}^{t=1} y(t)\frac{dx}{dt}dt \\
&= \frac{27\pi}{8} + \frac{9}{2}\int_{t=-1}^{t=1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt
\end{aligned}$$

ここで, 第 2 項に関しては以下のように求まり,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}dt &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt\\ &= \frac{1}{2}\pi-0=\frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

面積 S として

$$\underline{S=\frac{45}{8}\pi}$$

を得る.

第 4 問

(1)$2^{n+1}-1=2^0+2^1+\cdots+2^n$ の両辺を二乗して

$$\begin{aligned}(2^{n+1}-1)^2 &= 4^0+4^1+\cdots+4^n+\{2^0(2^0+2^1+\cdots+2^n)\}+2^1(2^0+2^1+\cdots+2^n)+\cdots+2^n(2^0+2^1+\cdots+2^n)\\ &= \frac{4^{n+1}-1}{3}+2a_{n,2}\end{aligned}$$

故,

$$\underline{a_{n,2}=\frac{4^n+2}{3}-2^{n+1}}$$

を得る.

(2)$n+1$ 個の整数

$$2^0,2^1,2^1,\ldots 2^n$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる時について考える. ただしここで $1\leqq k\leqq n$ とする. 2^n を選ぶ場合と選ばない場合に分けて以下の二通りが考えられる.

(i)2^n を選ぶとき.

残り n 個の整数 $2^0,2^1,2^1,\ldots 2^{n-1}$ から異なる $k-1$ 個を選んで積をとった和は $a_{n,k-1}$ に等しいので, この場合の積の和は,

$$2^na_{n,k-1}$$

である.

(ii)2^n を選ばないとき.

残り n 個の整数 $2^0,2^1,2^1,\ldots 2^{n-1}$ から異なる k 個を選んで積をとった和は $a_{n,k}$ に等しいので, この場合の積の和は,

$$a_{n,k}$$

である.

(i),(ii) から, $a_{n,k},a_{n,k-1},a_{n+1,k}$ の満たすべき関係式として次を得る.

$$a_{n+1,k}=2^na_{n,k-1}+a_{n,k} \tag{$*$}$$

ここでさらに $a_{n+1,n+1}$ については, 定義より $a_{n+1,n+1}=2^na_{n,n}$ が従う. これらを踏まえて, $f_{n+1}(x)$ は次の

ように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k}x^k + 1 + a_{n+1,n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2^{n+1}a_{n,k-1} + a_{n,k})x^k + 1 + 2^{n+1}a_{n,n}x^{n+1} \\
&= 2^{n+1}x\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k-1}x^{k-1} + a_{n,n}x^n\right) + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k \\
&= 2^{n+1}xf_n(x) + f_n(x)
\end{aligned}$$

故に,

$$\underline{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 1 + 2^n x}$$

そしてここで, $f_1(x) = 1 + a_{1,1}x = 1 + x$ も踏まえて帰納的に次のように $f_n(x)$ が求まる.

$$f_n(x) = f_1(x) \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdots \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \cdots \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = (1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^{n-1}x)$$

それ故に,

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \frac{(1+x)(1+2^1x)\cdots(1+2^nx)}{(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^nx)} = \underline{1+x}$$

と求まる.

(3)

$$f_n(2x) = 1 + a_{n,1}2x + \cdots + a_{n,n}(2x)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n,k}x^k$$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k$$

を (2) の結論である

$$f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x)$$

に代入して

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}x^k = (1+x)\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n,k}x^k$$

x^{k+1} の係数に注目して,

$$a_{n+1,k+1} = 2^{k+1}a_{n,k+1} + 2^k a_{n,k}$$

$(*)$ より

$$a_{n,k+1} = a_{n+1,k+1} - 2^n a_{n,k}$$

が成立することを踏まえてさらに変形を施すと,

$$a_{n+1,k+1} = 2^{k+1}(a_{n+1,k+1} - 2^n a_{n,k}) + 2^k a_{n,k} \iff \underline{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}}$$

を得る.

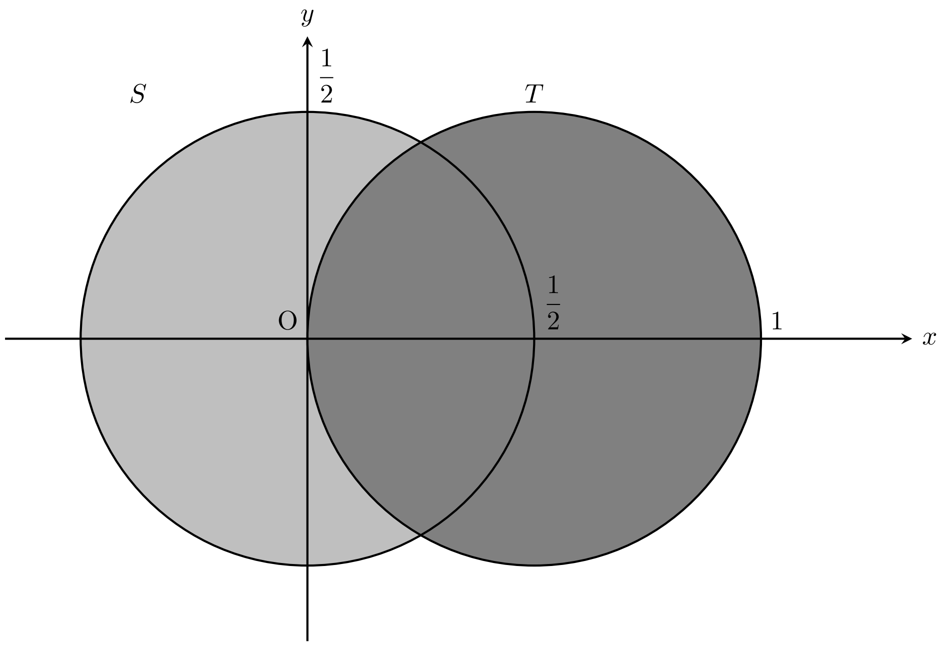
第 5 問

(1) 点 P の座標を $(x, y, 0)$ とおく. ただしここで, $x^2+y^2 \leqq 1$ である.. この時, 線分 AP と平面 $z=1$ との共有点の座標は $\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y}{2}, 1\right)$ となる. 線分 AP と平面 $z=1$ との共有点 $(X, Y, 1)$ の満たすべき条件は, 実数 x, y の存在条件として次のように求まる.

$$\exists x \ \ \exists y \ \begin{cases} X = \dfrac{x+1}{2} \\ Y = \dfrac{y}{2} \\ x^2+y^2 \leqq 1 \end{cases} \iff (2X-1)^2+(2Y)^2 \leqq 1 \iff \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

したがって, T は平面 $z=1$ 上の中心 $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$ で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部及び周上となる.

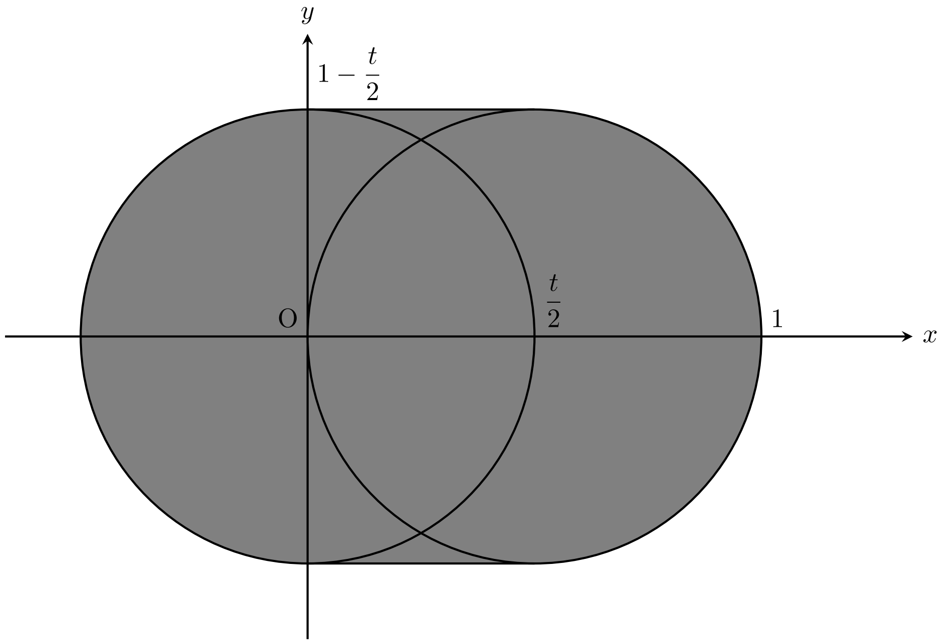
S に関しては, 相似より中心 $(0,0,1)$ の半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部及びその周上となるので, 下図を得る.



ただし境界は全て含む.

(2) 線分 AP が通過する部分の平面 $z=t (0 \leqq t \leqq 2)$ による断面について考察する. 断面積を $S(t)$ とおく. 点 P の z 座標を u とする時. 点 P が S に含まれる条件は, 点 P が平面 $z=u$ 上で点 $(0,0,u)$ を中心として, 半径 $\left(1-\dfrac{1}{2}u\right)$ の円の周上または内部に存在することである.

線分 AP と平面 $z=t$ が共有点を持つ必要十分条件は $0 \leqq u \leqq t$ であり, これを満たす u を固定した時, 平面 $z=t$ による断面は (1) での考察も踏まえて, 中心を $\left(1-\dfrac{2-t}{2-u}, 0, t\right)$ として半径 $\left(1-\dfrac{1}{2}u\right)\cdot\dfrac{2-t}{2-u}=1-\dfrac{1}{2}t$ の円の周上及び内部と求まる.u が $0 \leqq u \leqq t$ を満たして変化する時, $1-\dfrac{2-t}{2-u}$ の値域は $0 \leqq 1-\dfrac{2-t}{2-u} \leqq \dfrac{t}{2}$ となる. 故に, $z=t$ での断面図は下図のようになる.



ただし境界は全て含む.

上図灰色部分の面積 $S(t)$ は以下のようになる.

$$S(t) = \pi\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + t\left(1-\frac{t}{2}\right)$$

以上より, 求めるべき体積 V として

$$\begin{aligned} V &= \int_{t=0}^{t=2} S(t)dt \\ &= \pi\int_0^2 \left(1-\frac{t}{2}\right)^2 dt + \int_0^2 t\left(1-\frac{t}{2}\right)dt \\ &= 2\pi\int_0^1 u^2du - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 \\ &= \underline{\frac{2}{3}(\pi+1)} \end{aligned}$$

を得る.

第 6 問

(1)(左辺) $= f(\theta)$ と置く. 関数 f は連続であり, $A>0$ 故に以下が成立する.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) > 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right) < 0$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) > 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) < 0$$

故に中間値の定理から, $f(\theta) = 0$ は開区間 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ に各々少なくとも一つの解を持つ.

さらに, $f(0) = \lim_{\theta\to 2\pi-0} f(\theta) = -\sin\alpha$ と $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, f\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$ も合わせて同様に中間値の定理かも考慮して, 区間 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ いずれかに少なくとも一つ $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在する.

以上より, 題意が示された.

(2) 点 $\mathrm{P}(x,y)$, 点 $\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ とおく. ただし, x,y,θ は以下の条件を満たす.

$$\begin{aligned} 0 \leqq \theta < 2\pi \\ 2x^2+y^2 < r^2 \end{aligned} \tag{1}$$

楕円 C の点 Q における接線の方向ベクトルは $(-\sqrt{2}\sin\theta, \cos\theta)$ であり,$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とこれが直行する条件は,

$$(-\sqrt{2}\sin\theta,\cos\theta)\cdot(x-\sqrt{2}\cos\theta, y-\sin\theta)=0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)=0 & (x\neq 0 or y\neq 0)\cdots(*) \\ \sin 2\theta = 0 & x=y=0\cdots(\star) \end{cases}$$

が従う. ただし最後の変形においては点 P が原点以外の点である時, 定数 a を $0<a=\sqrt{2x^2+y^2}<r$, 定数 α を $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}x}{a}, \sin\alpha=\dfrac{y}{a}$ として定めた.

$(\star)$ の場合については, 明らか θ が 4 つ存在する.$(*)$ の場合について以下議論する.

さて, (1) の考察により, $\dfrac{1}{2a}>1 \Leftrightarrow 0<a<\dfrac{1}{2}$ の時, 式 $(*)$ を満たす $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ は少なくとも 4 つ存在する. それ故ここで例えば $r=\dfrac{1}{2}$ と定めると, 任意の点 P に対して条件 $0<a<\dfrac{1}{2}$ が成立し, この時任意の点 P に対して与えれた条件が成立する. 以上でこの条件を満たすような r の存在が証明された.

次に, $\dfrac{1}{2}<r<1$ の場合について考察する. この時点 $(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4})\in D$ であり, この点を点 P として与えられた直交条件を考えると, 点 Q の条件として以下を得る.

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

この方程式を $0\leqq\theta<2\pi$ の下で解く. $\phi=\theta+\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\leqq\phi<\dfrac{9\pi}{4}$ の変数変換の下, 方程式は

$$\sin(2\phi-\frac{\pi}{2})=\sin\phi \iff -\cos 2\phi=\sin\phi \iff \sin\phi=1,\frac{1}{2} \iff \phi=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},2\pi$$

と解け, このような点 P に対して点 Q は 3 つしか存在せず, 条件が満たされない. 故に $r\leqq\dfrac{1}{2}$ である.

以上より, r の最大値として $\underline{r=\dfrac{1}{2}}$ を得る.

$(*)$ 第 4 問 (1) 別解

$2^k(0\leqq k\leqq n-1)$ を選ぶとき. 残り $k-1$ 個の整数から 2^k とは異なるものを選び 2^k との積を考えて選びかた全てに対してその和をとると,

$$2^k2^0+2^k2^1+\dots 2^k2^{n-1}=2^k\sum_{k=0}^{n-1}2^k-2^k2^k=(2^n-1)2^k-4^k$$

さらに $0\leqq k\leqq n-1$ で和をとって, 重複に注意すると次が成立する.

$$a_{n,2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{(2^n-1)2^k-4^k\right\}=\frac{1}{2}\left\{(2^n-1)^2-\frac{4^n-1}{3}\right\}=\underline{\frac{4^n+2}{3}-2^{n+1}}$$