第 1 問

$$f'(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x=\frac{\sin x(1-\sin^2 x)-x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{(\sin x\cos x - x)\cos x}{\sin^2 x}$$

でありここで一般に $x>0$ において $\sin x<x$ なので $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x<\dfrac{1}{2}\cdot 2x=x$ から $(\sin x\cos x-x)\cos x<0$ に注意して増減表を作成すると以下のようになる.

x	$(+0)$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(\pi-0)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$+\infty$

ここで, 端点の極限について

$$\underline{\lim_{x\to+0}f(x)=1+1=2,\ \lim_{x\to\pi-0}f(x)=+\infty}(\because \sin x\to+0, x\to\pi-0, \cos x\to -1)$$

を用いた.

第 2 問

(1)${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ に注意して,

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}}&=\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}}{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}}\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\\&=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

であり

$$2n(n+1)=(2n+1)\cdot n+n$$

であることから, 互除法の原理より $2n(n+1)$ と $2n+1$ の公約数は n と $2n+1$ の公約数となる. さらに $2n+1=2\cdot n+1$ であり, n と 1 は互いに素なので $2n(n+1)$ と $2n+1$ も互いに素である. 故に $n(n+1)$ と $2n+1$ も互いに素である. ここで連続 2 整数の積であることから $n(n+1)$ は偶数となり, $\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{Z}$ である. また $\dfrac{n(n+1)}{2}$, $2n+1$ は互いに素となる.($\because$2 以上の公約数 p を持つと仮定すると,p は $n(n+1)$ と $2n+1$ の公約数にもなり, これらが互いに素であることに矛盾する.) 以上より,

$$\underline{p_n=\frac{n(n+1)}{2}, q_n=2n+1}$$

(2) 帰納的に以下が成立する.

$$a_1=3, a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{3q_nq_{n-1}\cdots q_2}{p_np_{n-1}\cdots p_2}(n\geqq 2)\cdots(*)$$

これに従って

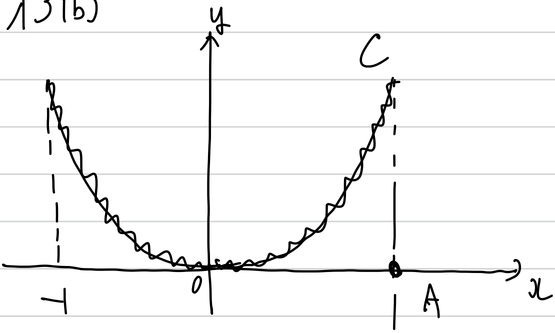
$$a_2=5, a_3=\frac{35}{6}$$

であり, $a_n(n\geqq 4)$ に対しては式 $(*)$ より整数でないことが従う. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して q_n は奇数であり式 $(*)$ より以下が成立する.

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_4}{a_3}\cdot a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{35q_nq_{n-1}\cdots q_2}{3p_np_{n-1}\cdots p_2}(n\geqq 4)$$

これより, $n\geqq 4$ の時 a_n を既約分数の形で表示すると分母は 2 の倍数となり, 整数とはなり得ないことがわかる. 以上より求める n は $\underline{n=1,2}$

第3問

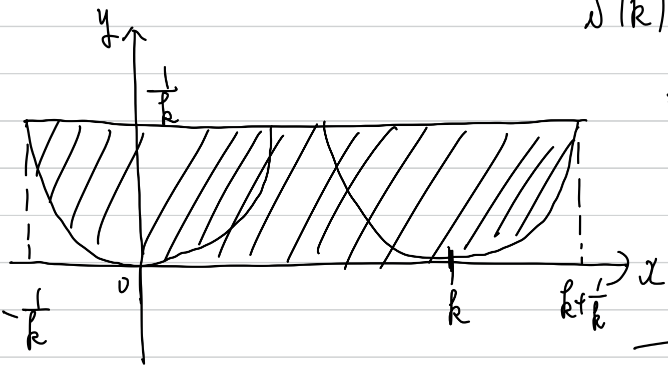


kは定数であることに注意する。
まず点Qを固定する。
$\overrightarrow{OQ'} = k\overrightarrow{OQ}$ とおくと、

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{Q'R} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP}$

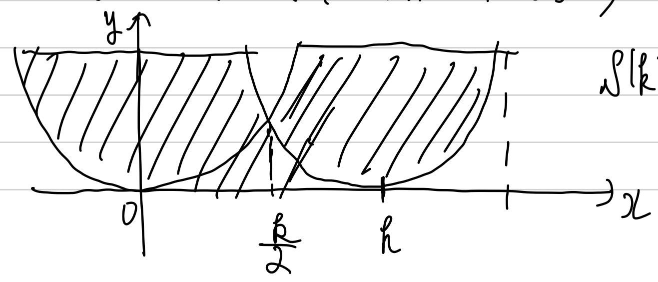
PがC上を動くとき、Rが描く図形は Q'を原点とする放物線 $y=kx^2$ の $-\frac{1}{k} \leqq x \leqq \frac{1}{k}$ の部分である。Q' $(q, 0)$ は $0 \leqq q \leqq k$ の範囲を動くことを考慮すると以下のように $S(k)$ は求まる。

(i) $\frac{1}{k} \leqq k - \frac{1}{k} \Leftrightarrow k \geqq \sqrt{2}$ のとき
$S(k)$は下図斜線部なので



$$S(k) = \frac{1}{k}\left(k + \frac{2}{k}\right) - \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx$$
$$= 1 + \frac{2}{k^2} - \frac{2}{3}\cdot k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^3$$
$$= \underline{1 + \frac{4}{3k^2}}$$
$$\underline{\lim_{k \to \infty} S(k) = 1}$$

(ii) $0 < k \leqq \sqrt{2}$ のとき
$S(k)$は下図斜線部面積なので、

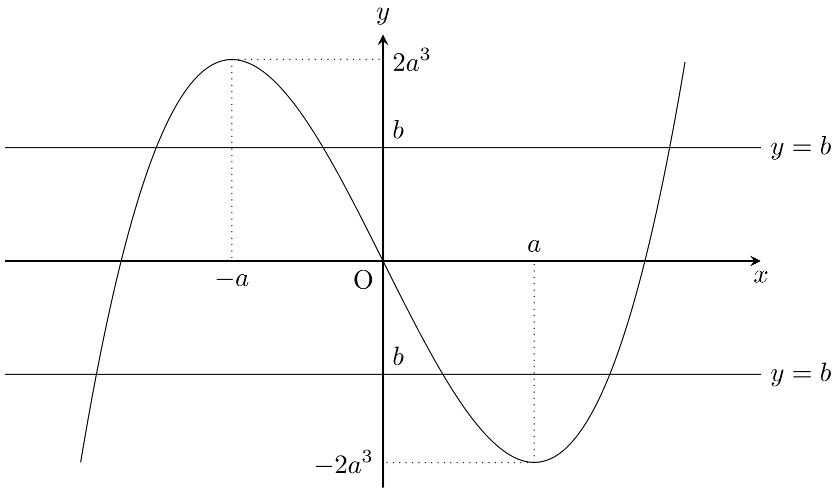


$$S(k) = 2\int_0^{\frac{1}{k}} k\,dy - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx$$
$$= 2 - 2\cdot\frac{k}{3}\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^3$$
$$= \underline{2 - \frac{k^3}{12}} \quad \underline{\lim_{k \to +0} S(k) = 2}$$

第 4 問

$f'(x)=3(x-a)(x+a)$ であることを踏まえて $\mathbb{R}$ 上での $f(x)$ の増減表と概形は以下のようになる.

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$(+\infty)$



上図のように, $f(x)=b$ の解の個数と $y=f(x), y=b$ の共有点の個数は $1:1$ に対応するので

$$(\text{条件 } 1) \iff -2a^3 < b < 2a^3$$

さらにこの時 $-a<\beta<a$ であり $-a \leqq x \leqq a$ において $f(x)$ は単調減少なので条件 1 が満たされる下で

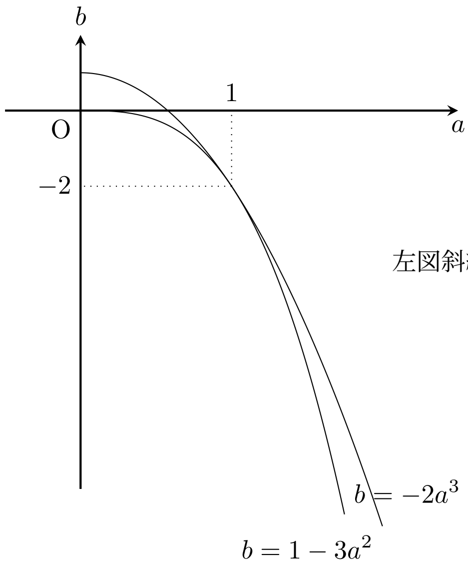
$$(\text{条件 } 2) \iff \begin{cases} f(\beta) < f(1) \\ a > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b < 1-3a^2 \\ a > 1 \end{cases}$$

これらを満たす点 (a,b) を図示すると以下のようになる. ただしここで

$$1-3a^2=-2a^3 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=1,-\frac{1}{2}$$

$$1-3a^2=2a^3 \Leftrightarrow (a+1)^2(2a-1)=0 \Leftrightarrow a=-1,\frac{1}{2}$$

を用いた.



左図斜線部ただし境界は全て含まない

第 5 問

(1)$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は平行なので, ある実数 $k \neq 0$ が存在して

$$k(z-0) = u - 1 \Leftrightarrow u = kz + 1$$

さらに, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$ なので, $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ に注意して

$$|z-1| = |z-u| \Leftrightarrow |z-1|^2 = |(1-k)z-1|^2 \Leftrightarrow k^2 + 2k(z+\overline{z}-1) = 0$$

$k \neq 0$ なので, $k = 2 - z - \overline{z}$ であり,$\underline{u = kz + 1 = 2z - z^2}$. さらにここで, $1 - u = 1 - 2z + z^2 = (1-z)^2$ に注意して

$$\underline{\frac{\overline{w}}{w}} = \frac{(1-z)^2}{(1-\overline{z})^2} = \frac{(z\overline{z}-z)^2}{(1-\overline{z})^2} = \underline{z^2}$$

$$\underline{\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}} = \left|1 + \frac{\overline{w}}{w} - \frac{1}{w}\right| = \left|1 + z^2 - (1-u)\right| = |u + z^2| = |2z| = \underline{2}$$

(2)z が C' に含まれることは, $z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{3})$ と表せることと同値である. この時

$$\begin{aligned}
w = (z-1)^{-2} &= (\cos\theta - 1 + i\sin\theta)^{-2} \\
&= \left(-2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2} \\
&= \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}^{-2} \\
&= \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(\cos\theta - 1)}
\end{aligned}$$

$w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$ と表すと,

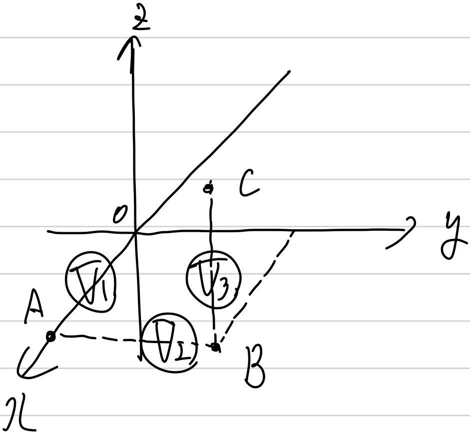
$$\begin{cases} x = -\dfrac{\cos\theta}{2(\cos\theta-1)} \\ y = \dfrac{\sin\theta}{2(\cos\theta-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2x}{2x-1} \\ \sin\theta = \dfrac{2y}{2x-1} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{3}$ なる θ の存在条件は x, y に関する条件として以下のようになる.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2x}{2x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{2y}{2x-1}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{2x}{2x-1} \leqq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 + \dfrac{1}{4} \\ x \geqq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

すなわち$\underline{\text{放物線 } x = -y^2 + \frac{1}{4} \text{ の } x \geqq \frac{1}{2} \text{ の部分である}}$

第6(b)



(1) $y=t$ と V_1 が共有点をもつ条件 $-r\leq t\leq r$

〃 V_3 〃 $1-r\leq t\leq 1+r$

$\frac{1}{2}<r<1$ に注意して, $\underline{1-r\leq t\leq r}$

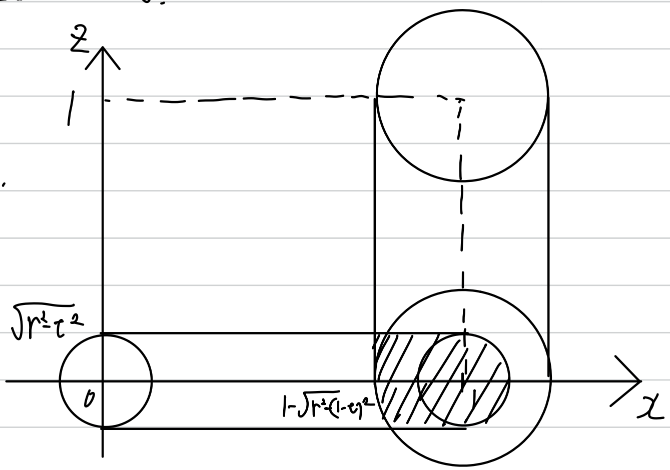
中心が OA上にある時, $y=t$ による球の断面は中心が球中心の$y=t$への正射影で半径 $\sqrt{r^2-t^2}$ の円。

〃 AB 〃 〃 $\sqrt{r^2-(1-t)^2}$ の円。

より次の(i),(ii)のように図示される.

(i) $\frac{1}{2}\leq t\leq r$ のとき

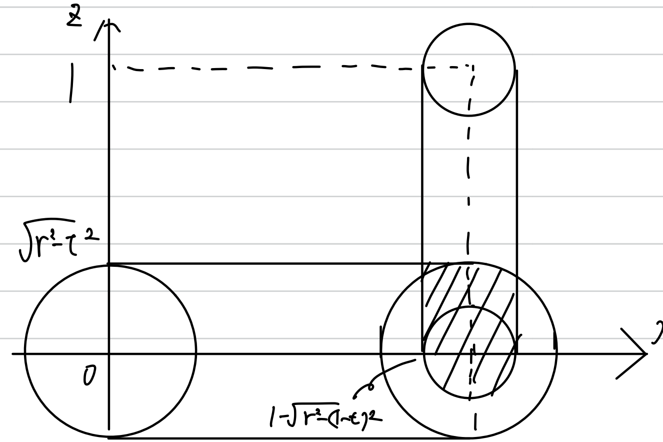
$r^2-t^2\leq r^2-(1-t)^2$ より, 右図.



(ii) $1-r\leq t\leq \frac{1}{2}$ のとき

$r^2-t^2\geq r^2-(1-t)^2$

より 右図.



(2) $y=t$ 上で, V_1, V_3 の共通部分は (2) の斜線部分
$(1,0)$ と最も距離が大きい点と $(1,0)$ との距離を d とし

$$d^2 = r^2-t^2+r^2-(1-t)^2$$

であり, この平面で V_2 は中心 $(1,0)$ で半径 r の円より,
この平面上共有部分が V_2 に含まれる条件は,

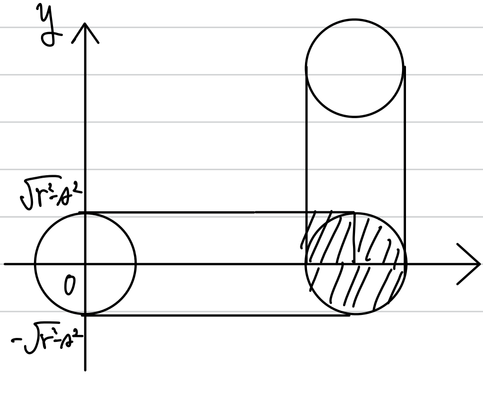
$$d^2 \leqq r^2 \iff t^2+(1-t)^2 \geqq r^2$$

任意の $t\in[1-r, r]$ で成立する条件は, $[1-r, r]$ 上で左辺の
最小値が $(\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ ゆえ, $\underline{\frac{1}{2}<r\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) 対称性より V_1 と V_2 の共通部分と V_2 と V_3 の共通部分の体積は等しい
さらに (2) の条件より, V_1 と V_3 の共通部分の体積は, V_1, V_2, V_3 の共通
部分の体積と等しいので,

$$\underline{V=3S-2T}$$

(4) $\underline{S=\frac{4}{3}\pi r^3+r^2}$ T については $z=a$ $(-r\leqq a\leqq r)$ での V_1, V_2 の
断面を考える。球面の $z=a$ での断面は, 半径 $\sqrt{r^2-a^2}$ の円で, V_1, V_2 の
断面は下図.



断面積は, $r^2-a^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi\cdot(r^2-a^2)$
$=(1+\frac{3}{4}\pi)(r^2-a^2)$

なので $T=\int_{-r}^{r}(1+\frac{3}{4}\pi)(r^2-a^2)\,da$

$=(1+\frac{3}{4}\pi)\cdot\frac{4}{3}r^3$

$$\therefore \underline{V=(2\pi\cdot\frac{8}{3})r^3+3\pi r^2}$$